

# AMBIENTE DE DISEÑO GEOMÉTRICO BASADO EN SPLINES ALGEBRAICOS Y PARAMÉTRICOS

ORDAZ F. PALUSZNY M. RODRÍGUEZ O.

Centro de Computación gráfica y Geometría Aplicada,  
Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela<sup>1</sup>.  
e-mail: cgga@cgga.ciens.ucv.ve.

---

**Resumen:** Se presenta una herramienta de software para modelación geométrica que emplea splines algebraicos y paramétricos. Desarrollado bajo un enfoque orientado a objetos, el diseño propone un mecanismo de desarrollo de aplicaciones gráficas, en el cual se logra independizar los aspectos de interfase gráfica de los inherentes al concepto matemático, esto permite una mayor extensibilidad e incorporación de nuevos tipos de objetos al editor, así como también facilidades al momento de hacer mantenimiento al sistema. Se brindan los mecanismos típicos de un ambiente de edición y una interacción directa con los objetos del editor, haciéndolo cómodo y práctico en su uso.

**Palabras Claves:** spline, diseño orientado a objeto, CAD, modelación geométrica.

---

## 1. Introducción

Las curvas splines son curvas polinomiales a trozos que sirven para modelar formas complejas sin tener que usar expresiones polinomiales de alto grado, las cuales poseen varias limitaciones. Se propone una herramienta de utilidad para Diseño Asistido por Computador, que permite la construcción automática de Splines Algebraicos (A-Splines) y Splines Paramétricos (P-Splines) con continuidad  $G^2$  en sus puntos de unión. Se ofrecen además asas geométricas para la deformación global y el control local del spline.

Una de las características resaltantes de la herramienta propuesta es la facilidad de construcción y manipulación de splines híbridos formados por curvas algebraicas: de grado dos y grado tres que preservan continuidad  $G^2$  en los puntos de unión. Esto se logra al promover segmentos de curva de un tipo a otro, con lo cual se puede realizar un fino ajuste sin que se modifique el resto del spline.

La herramienta posee un ambiente de trabajo amigable que permite un manejo práctico de los splines, el editor constituye el núcleo de este ambiente. El sistema está desarrollado bajo la metodología orientada a objeto. Para satisfacer los requerimientos de reutilización, extensión, etc. de software, los objetos matemáticos que se emplean se han independizado de los objetos asociados a la interfase gráfica, brindando así la posibilidad de incorporar rápidamente nuevos tipos objetos sin mayores cambios. El sistema está implantado en C++ usando las bondades gráficas ofrecidas por Motif.

## 2. Splines Algebraicos

Son splines formados por trozos de curvas algebraicas, cada uno de los cuales está confinado a un triángulo de control, de vértices  $P_0, P_1, P_2$  [10]. Los llamaremos splines cúbicos o cónicos si los segmentos componentes son de grado tres o dos, respectivamente. La expresión general de una curva algebraica está dada por:

$$\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0 \quad \text{en coordenadas Euclídeas} \quad (1)$$

$$\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} s^i t^j u^k = 0 \quad \text{en coordenadas baricéntricas} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Trabajo financiado parcialmente por el Programa de Nuevas Tecnologías. BID-CONICIT

con  $a_{ij}$ ,  $a_{ijk}$  constantes reales,  $s + t + u = 1$  y  $n$  el grado de la curva.

Continuidad  $G^2$  significa que segmentos adyacentes del spline tienen la misma tangente y curvatura en los puntos de unión (Fig 1).

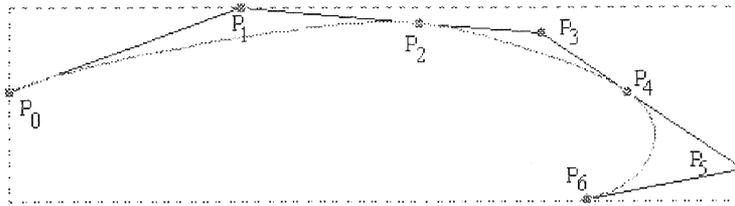


Fig 1. Spline Algebraico, los puntos de unión son :  $p_2, p_4$ .

Tanto los splines formados por segmentos de cúbicas como cónicas poseen control global y/o control local. En cada caso la continuidad  $G^2$  se mantiene si se realizan deformaciones sobre el spline [5]. Los cúbicos tienen además control local.

Los splines cónicos  $G^2$  utilizados en este trabajo, son los propuestos por Farin [3]. El segmento  $i$ -ésimo de un spline cónico se representa en términos de las coordenadas baricéntricas con respecto al  $i$ -ésimo triángulo por:

$$\gamma_i s u - t^2 = 0 \tag{3}$$

donde  $\gamma_i$  es una constante, y  $s + t + u = 1$ .

La continuidad  $G^2$  se garantiza verificando que la curvatura de segmentos de curva vecinos en el punto de unión  $i$  sea la misma:

$$\frac{1}{\gamma_i} \frac{\Delta_i}{r_i^3} = \frac{1}{\gamma_{i+1}} \frac{\Delta_{i+1}}{l_{i+1}^3}$$

donde los  $r_i$ ,  $l_i$ ,  $\Delta_i$  están definidos como (Fig 2):

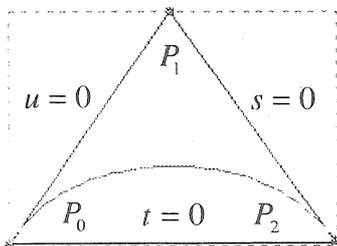


Fig 2. Segmento Cónico

$$r_i = |P_1 P_2| \quad l_i = |P_0 P_1|$$

$\Delta_i =$  área del triángulo  $i$ -ésimo.

La acción de multiplicar cada  $\gamma_i$  por un número real positivo arbitrario no afecta la continuidad de las curvaturas en los nodos, sin embargo, afecta al spline. Por ende constituye un asa de control global para el spline de Farin.

De la misma forma los splines cúbicos de nuestro interés son aquellos cuya cúbica pasa por  $P_0$  y  $P_2$  y son tangentes a  $u=0$  y  $s=0$  [10] teniendo la forma:

$$a s^2 u + b s u^2 + c s t^2 + d t^2 u + e s t u - f t^3 = 0 \tag{5}$$

donde  $s, t, u$  son las coordenadas baricéntricas asociadas al triángulo  $P_0, P_1, P_2$ .

Para garantizar que un segmento de la cúbica que pasa por  $P_0$  y  $P_2$  esté contenido en el triángulo y sea convexo, una condición suficiente es que  $a, b, c, d > 0$  y  $f = 0$  [9]. Estos coeficientes, de acuerdo a [9] [6], pueden ser expresados como:

$$\begin{aligned}
 a &= -R\beta_2 t_0^2 u_0 \\
 b &= \beta_1 s_0 t_0^2 \\
 c &= (1 - \beta_1) s_0 u_0^2 \\
 d &= -R(1 - \beta_2) s_0^2 u_0 \\
 e &= (1 - R - 2\beta_1 + 2R\beta_2) s_0 t_0 u_0
 \end{aligned} \tag{6}$$

donde:  $\beta \in (0,1)$  y  $(s_0, t_0, u_0)$  son las coordenadas baricéntricas de un punto de interpolación adicional  $B_0$  dentro del triángulo (Fig 3)

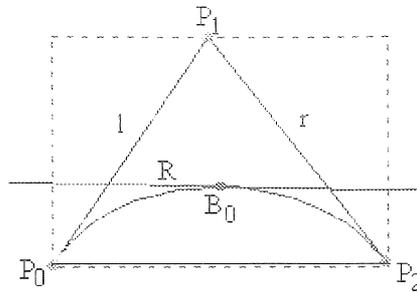


Fig 3.  $B_0$  es un punto de interpolación adicional a  $P_0$  y  $P_2$

En [6] y [8] se establecen ampliamente las condiciones que se deben satisfacer para garantizar continuidad  $G^2$  en los puntos de unión. En la sección 5 detallaremos como se logran los cambios globales y locales sobre los splines.

En este trabajo manipularemos dos tipos de A-splines con curvatura continua:

- Averaging, se obtienen a través de un proceso de promediación de las curvaturas de ciertas cónicas standard en los triángulos que comparten puntos de unión [7] y se pueden modificar localmente en forma directa.
- Chamonix, se caracterizan porque están descritos por cinco coeficientes homogéneos, independientemente del número de segmentos del spline. Se pueden modificar a través de dos asas globales: Drag y Swell. Aquí los coeficientes  $a, b, c, d,$  y  $e$  vienen dados como en (6).

### 3. Construcción

En general el procedimiento para crear un spline algebraico está basado en la construcción de un polígono de control localmente convexo al cual se ajustará nuestro spline. Existen dos maneras de construir el polígono de control:

- Para los splines de Farin y Averaging el polígono debe ser construido bajo el siguiente procedimiento:
  - i) Escoger un triángulo inicial ( $i=0$ ) arbitrario  $P_{2i} P_{2i+1} P_{2i+2}$ .
  - ii) Escoger un punto  $P_{2i+3}$  colineal a los puntos  $P_{2i+1} P_{2i+2}$  (Fig 1).

- iii) Escoger un punto  $P_{2i+4}$  que pertenezca al mismo semiplano que  $P_{2i}$  con respecto a la recta formada por  $P_{2i+1}$  y  $P_{2i+2}$ , luego ( $i=i+1$ ) (Fig 1).
- iv) Volver a ii) ó parar.
- v) Desplegar el spline.

- Para el spline de Chamonix el polígono debe ser construido bajo el siguiente procedimiento:

- i) Escoger un triángulo inicial ( $i=0$ ) arbitrario  $P_{2i}$   $P_{2i+1}$   $P_{2i+2}$ .
- ii) Escoger un punto  $P_{2i+4}$  que pertenezca al mismo semiplano que  $P_{2i}$  con respecto a la recta formada por  $P_{2i+1}$  y  $P_{2i+2}$ . El punto  $P_{2i+3}$  es generado automáticamente por el sistema para garantizar continuidad  $G^2$ , luego ( $i=i+1$ ) (Fig 1).
- iii) Volver a ii o parar.
- iv) Desplegar el spline.

#### 4. Splines Paramétricos

En el editor figuran tres tipos de splines paramétricos, NURBS, Curvas de Bézier, y Curvas Racionales de Bézier, ampliamente descritos en [4] y [2]. Sobre estos, se puede efectuar movimiento de los puntos de control, modificación de los valores de curvatura en los extremos de las curvas, y un control global denominado cuasi-gamma que permite que el spline se ajuste mejor al polígono de control.

Los splines paramétricos coexisten con los splines algebraicos en el editor gracias a la construcción de splines híbridos, esto es, cada segmento de cónica de un spline creado como Farin puede ser transformado a un segmento de cúbica o paramétrica de grado dos. Así, el spline resultante puede involucrar curvas cúbicas, cónicas y paramétricas. Los únicos controles aplicados sobre un spline híbrido, son los brindados por cada tipo de curva que éste posea, ya que no se dispone de un control global que afecte de manera homogénea a todo el spline.

#### 5. Control sobre los Splines: Asas Geométricas

Una de las ventajas de trabajar con curvas spline es que las podemos deformar localmente, permitiendo esto una mayor flexibilidad en el proceso de modelación. Los ajustes locales deseados, se logran a través de asas geométricas definidas para tal fin. En la herramienta que se presenta, estas modificaciones se hacen después de las deformaciones globales.

##### 5.1. Asas Geométricas Globales para Chamonix

El spline de Chamonix manejado por nuestro editor, puede ser expresado en función de tres parámetros que son compartidos por todos los segmentos de cúbicas que lo conforman. Estos son  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{t}_0$  y  $R$  cuya relación con el resto de los parámetros de la curva esta dada por:

$$\beta_1 = \beta_2 = \bar{\beta} \tag{11}$$

$$t_0 = \bar{t}_0 \quad y \quad s_0 = u_0 = \frac{(1 - \bar{t}_0)}{2}$$

$$R = -1$$

donde los coeficientes a,b,c,d,e, se definen en función de estos como en la ecuación (6).

- El asa  $\bar{\beta}$  es denominada Swell, su modificación produce desplazamiento de todas las curvas hacia las paredes del polígono de control, manteniendo la condición de que ambos splines interpolan los puntos intermedios con la mismas coordenadas baricéntricas (con respecto a los triángulos que contienen los segmentos) (Fig 4).

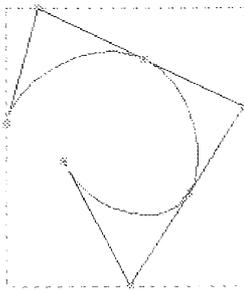


Fig 4.a. Antes

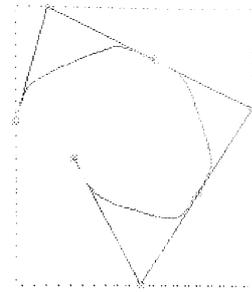
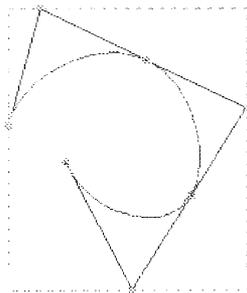


Fig 4.b. Después

Fig. 4. Efecto de Swell sobre un Spline de Chamonix.

- Análogamente el parámetro  $\bar{t}_0$  es denominado Drag, su modificación produce un ajuste del spline al polígono de control, esto es debido a que estamos forzando que los puntos de interpolación intermedios se acerquen a los vértices de los triángulos. (Fig. 5).



+ Fig 5.a. Antes

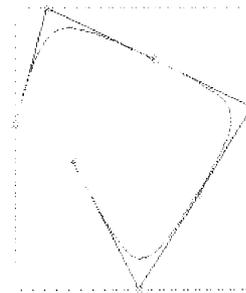


Fig 5.b. Después

Fig. 5. Efecto del parámetro  $\bar{t}_0$  sobre un Spline de Chamonix.

- El valor R, que por defecto se estableció como -1 también puede modificarse, lo cual causa una inclinación o sensación de desbalanceo simultáneo en todos los segmentos de curva del spline.

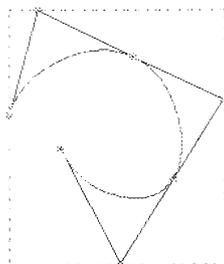


Fig 6.a. Antes

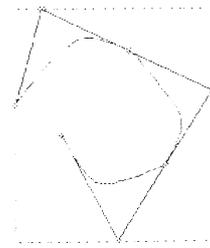


Fig 6.b. Después

Fig. 6. Cambio de la inclinación simultánea en un Spline de Chamonix

### 5.2. Asa Geométrica para el Spline de Farin

El spline de Farin se forma por segmentos de cónicas, gracias a esto, es posible emplear el parámetro  $\gamma_0$  para modificar todas las curvas del spline, manteniendo continuidad  $G^2$ . Siendo  $\gamma_0$  un real positivo, se puede describir en términos finitos por:

$$\gamma_0 = \frac{1}{1-\alpha} \quad (12)$$

donde  $\alpha \in (0,1)$ .

Este nuevo valor de  $\gamma_0$  se le asocia al primer segmento de curva, para el resto de las curvas los subsecuentes valores de  $\gamma$  se calculan como se hizo para la construcción del spline por defecto.

El efecto geométrico causado por este parámetro es visualmente muy parecido al causado por el control Drag del Chamonix, ajustar el spline al polígono de control.

### 5.3. Asas Locales del spline de Averaging

El spline de Averaging está constituido por segmentos de curvas cúbicas, cada una de ellas posee tres tipos de controles que pueden efectuarse de manera independiente, modificando solo uno de ellos a la vez y manteniendo constante el resto. El primero permite el movimiento del punto de interpolación  $B_0(s_0, t_0, u_0)$  dentro del triángulo de control en el cual yace la curva (Fig 7).

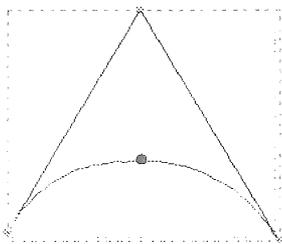


Fig 7.a. Antes

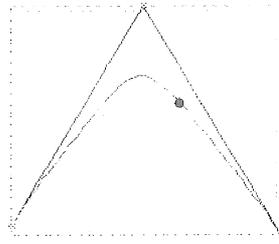


Fig 7.b. Después

Fig. 7. Modificación del punto de interpolación  $B_0$  en un Spline de Averaging.

El segundo de los controles tiene que ver con la modificación de la inclinación del segmento de curva en el punto de interpolación (Fig 8).

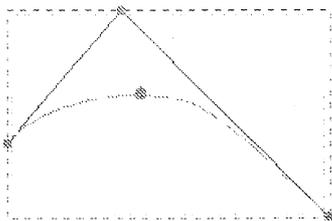


Fig 8.a. Antes

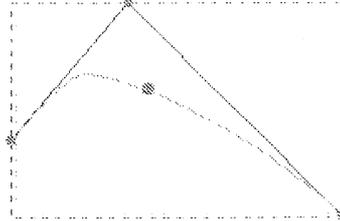


Fig 8.b. Después

Fig. 8. Control de la pendiente R sobre un spline de Averaging.

El tercero de los controles locales sobre el spline, está basado en el control del valor de curvatura en cualquiera de los extremos de un segmento de curva. Este cambio afecta a lo sumo, a los segmentos de curvas que sean adyacentes al punto de unión seleccionado (Fig 9).

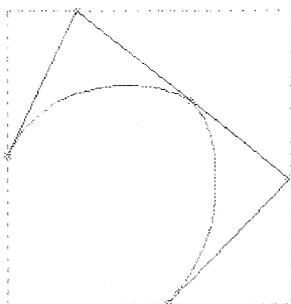


Fig 9.a Antes

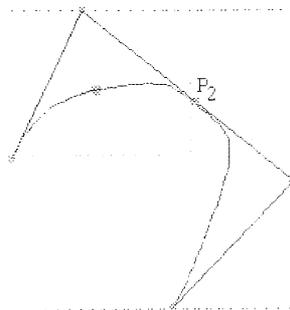


Fig 9.b Después

Fig. 9. Control de la curvatura en P2

#### 5.4. Asas geométricas de los Splines Algebraicos generados mediante Chamonix

Construido un spline de Chamonix, el editor permite seleccionar segmentos de curvas, brindándole flexibilidades locales, pero al mismo tiempo, eliminando sus propiedades de control global. Así el spline que en sus inicios fué de tipo Chamonix es ahora un spline algebraico más general, esto es, cada segmento del spline está definido por una ecuación (en principio) distinta de las demas. Cada segmento de cúbica ofrece dos tipos de controles, movimiento del punto de interpolación y control de la pendiente, estos parámetros coinciden exactamente con los ya previamente explicados en el spline de Averaging.

### 6. Aspectos de la Implantación

#### 6.1. Independencia del objeto matemático de su interfase gráfica

Con el fin de reutilizar en su totalidad y extender el código de las clases de los nuevos splines Algebraicos y el resto de los objetos involucrados en el editor, se separó la abstracción matemática asociada a cada uno de ellos de todas las rutinas que permiten su despliegue y manipulación gráfica (Interfase Gráfica).

Esto se hizo mediante la creación de una clase asociada a cada tipo de objeto manipulado, encargada de extender la funcionalidad de la abstracción matemática. De esta forma, el subsistema que administra la interacción del usuario con los objetos, no interactúa con el concepto matemático en si mismo ( Fig 10) sino con su interfase gráfica.

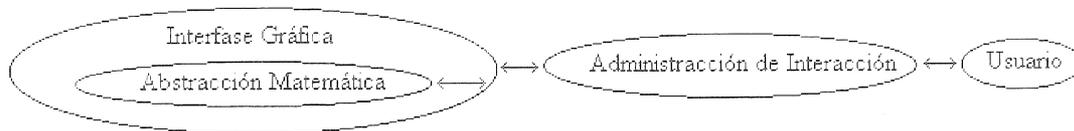


Fig 10. Esquema de la interacción entre los módulos del Editor

Usando la terminología O.O, el Objeto Matemático es "parte de" la clase Interfase Gráfica, la cual además de todo es la única que lo instancia y manipula directamente. Al mismo tiempo el modulo administrador de interacción solo instancia y manipula las interfases gráficas de los objetos.

## 6.2. Manipulación abstracta de los objetos del editor

El editor despliega y manipula diferentes tipos de splines, 3 de tipo algebraico, 4 de tipo paramétrico y uno híbrido. Cada objeto que se encuentra en el editor ofrece su propia manera de construcción, controles local y global, entre otras cosas. Para garantizar futuras extensiones del editor, se asumió la tarea de generalizar los aspectos inherentes al comportamiento de cada objeto (Interfase Gráfica). Así el módulo que administra la interacción con el usuario hace un uso abstracto de todos los objetos del editor, basándose sólo en un conjunto bien definido de métodos. De esta forma la incorporación de nuevos objetos no afecta, o afecta lo menos posible al módulo de administración de interacción, además no se invierte esfuerzo en el diseño de una interfase, sino que se reutiliza la ya existente.

## 6.3. Diagrama de Clases

En el diagrama de clases se aprecian dos grandes bloques, el primero representa la manera en que se modelan todos los objetos matemáticos, en un primer nivel, es clara la generalización de todos los tipos de curvas (cónicas, cúbicas, Bézier, NURBS, racionales de Bézier) en la clase "Curve". Luego otro nivel de generalización comprende la visión abstracta de los objetos a ser incorporados al editor (splines, círculos, elipses) mediante "GenericObject". El otro bloque de clases representa el modelo de la interfase gráfica de todos los objetos matemáticos, aquí la clase interfase gráfica de todos los tipos de spline ha sido generalizada mediante "XISpline". Del mismo modo se brinda una interfase genérica para las posibles clases de interfase gráfica que se deseen incorporar.

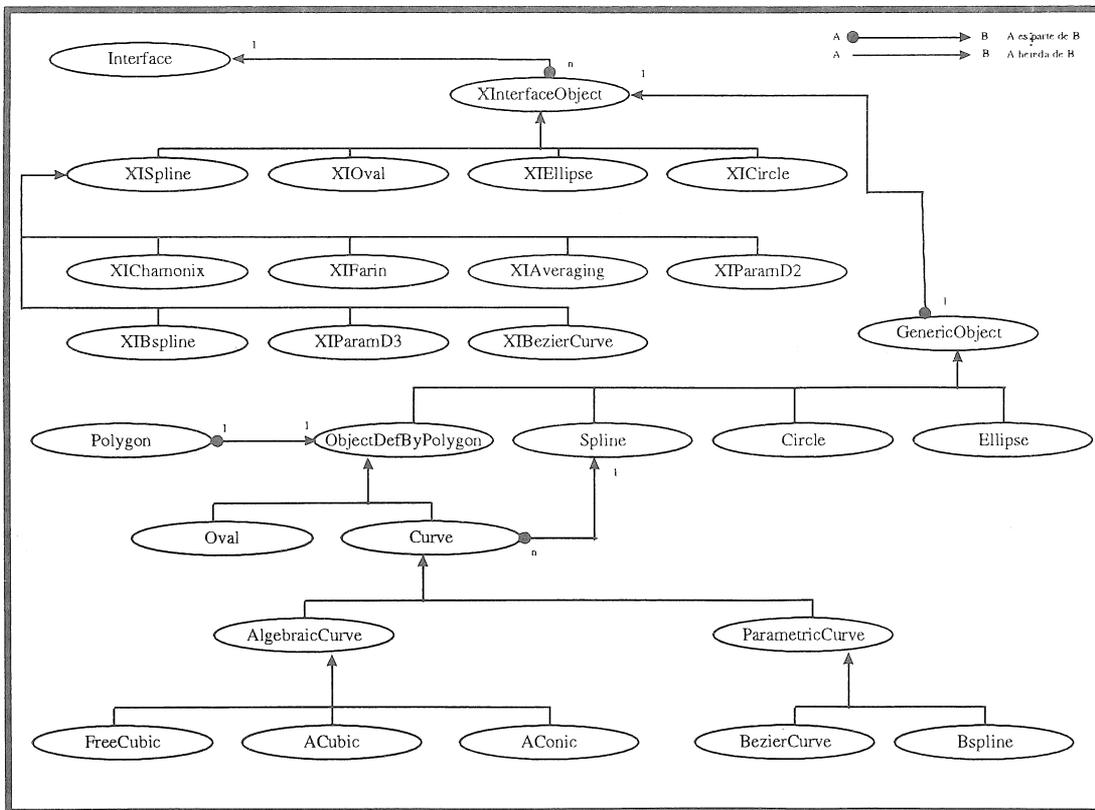


Fig. 11 Diagrama de Clases

## 7. Características del sistema

El sistema cuenta con las facilidades típicas de un ambiente de edición, se han incorporado opciones para mover, copiar, cortar, y pegar splines, así como también aquellas que permiten guardar y recuperar escenas mediante el uso de archivos. El ambiente es totalmente interactivo y gran parte de las acciones se efectúan a través de manipulación directa con los objetos del editor. Esto hace que resulte fácil de aprender y cómodo en su manipulación.

Por otra parte, todo el código que modela los objetos matemáticos ha sido desarrollado de manera que sea portable a cualquier plataforma que posea un compilador de C++. Solo las clases que modelan la interfase gráfica del sistema están restringidas a aquellas que posean Motif y X-Window.

Las facilidades de extensión y mantenimiento, ya han sido probadas mediante la incorporación de nuevos objetos al editor (Ovalos, NURBS y curvas de Bézier, splines algebraicos de forma libre).

## 9. Agradecimiento

Agradecemos la colaboración de todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este trabajo, y de forma especial a nuestro colega y amigo el Lic. Alfredo Muñoz, quién participó activamente en la concepción del diseño e implantación de la aplicación.

## 10. Bibliografía

- [1] BAJAJ C. y G. Xu, A-Splines: Local interpolation and approximation using  $C^k$ -continuous piecewise real algebraic curves, Technical Report. Purdue University, 1992.
- [2] DE BOOR C. A Practical Guide to Splines. Applied Mathematical Sciences. Nr. 27. Springer Verlag. 1978.
- [3] FARIN G. Curvature continuity and offsets for piecewise conics. ACM Transactions on Graphics. Vol 8. No.2. April 1989, pag 89-99.
- [4] FARIN G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. 2ª Edición. Academic Press. New York 1990.
- [2] MARSILIO P., PALUSZNY M., PATTERSON R. y RODRIGUEZ O. Ambiente híbrido de diseño gráfico: Splines Algebraicos y Paramétricos. XXV Conferencia Latinoamericana de Informática. Mexico 1994.
- [5] PALUSZNY M. y PATTERSON R.  $G^2$ -continuous cubic algebraic splines and their efficient display. Curves and Surfaces in Geometric Design. Eds. LAURENT P.J., LE MÉHAUTÉ, A. y SCHUMAKER L. A.K. Peters. Wellesley, Massachusetts. 1994, pag. 353-360.
- [6] PALUSZNY M. y PATTERSON R. Geometric control of  $G^2$  cubic A-Splines. Computer Aided Geometric Design (to appear).
- [8] PALUSZNY M. y PATTERSON R. Curvas algebraicas de grado tres en modelación geométrica, Quinta Escuela Venezolana de Matemáticas, Univ. de los Andes. Mérida, Venezuela. 1992.
- [10] PALUSZNY M. y PATTERSON R. A family of tangent continuous cubic algebraic splines. ACM Transactions on Graphics, Vol.12, No. 3, July 1993, pag. 209-232.
- [1] SEDERBERG T. W., Planar piecewise algebraic curves, Comput. Aided Design 1 (1984), pag. 241-255.